EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + i$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer les points A', B' et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z + 1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathscr{D}_1$, image de la droite $\mathscr{D}$ par g.

c. Démontrer que $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z - 1| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h le la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$.