EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Un triangle

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$3 + i\sqrt{3}, \quad 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}.$$

On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$ $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega).$$

où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1.b)**.

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

EXERCICE 4

1) Un triangle.

a) $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-i\sqrt{3}(-1-i\sqrt{3})}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$. Maintenant, on sait que

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

(car $-i\sqrt{3}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative). En particulier,

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.}$$

b) Ainsi, le triangle ABC est rectangle en B. On en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC ou encore le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[AC]$. Ainsi,

$$\omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ est le point } \Omega \text{ d'affixe } \omega = 1+i\sqrt{3}.}$$

2) Une transformation du plan.

a) • $z_1 = 0+2 = 2$.

• $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1+i\sqrt{3}+2 = 3+i\sqrt{3}$.

• $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+i\sqrt{3}) + 2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{2} + 2 = 2 + \dfrac{4i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3}$.

• $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(2+2i\sqrt{3}) + 2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 + 2 = 1+2i\sqrt{3}-3+2 = 2i\sqrt{3}$.

b) • $A_1A_2 = ||z_2 - z_1| = \left|3+i\sqrt{3}-2\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_2A_3 = ||z_3 - z_2| = \left|2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_3A_4 = ||z_4 - z_3| = \left|2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2$.

$$\boxed{A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 2.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)+\omega &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3}) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{1+2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{2} + 1+i\sqrt{3}\\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} + 1+i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2\\ &= z_{n+1},\end{aligned}$$

et donc $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega).}$$

d) Soit r la transformation du plan d'expression complexe $z' = \omega + \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z-\omega)$.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3},$$

et donc r est la transformation d'expression complexe $z' = \omega + e^{i\pi/3}(z - \omega)$. On sait que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+1} = r(A_n) \text{ où } r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Omega A_{n+6} = \Omega A_{n+5} = \ldots = \Omega A_{n+1} = \Omega A_n$. D'autre part, d'après la relation de Chales,

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+2}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+5}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 6 \times \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

et donc $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. En résumé, $\Omega A_n = \Omega A_{n+6}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. On en déduit que $\overrightarrow{\Omega A_n} = \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}$ puis que $A_{n+6} = A_n$.

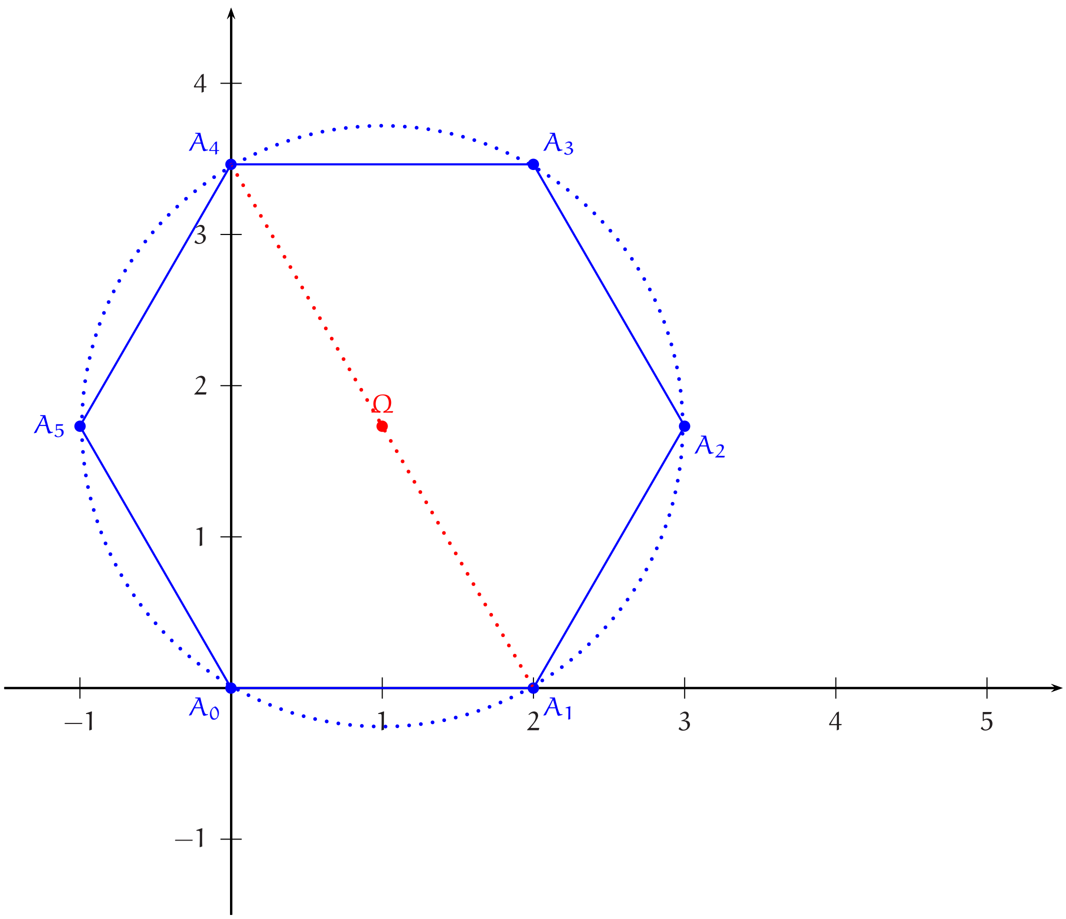
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+6} = A_n.}$$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, $A_{6(n+1)} = A_{6n+6} = A_{6n}$. Donc la suite $(A_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore, pour tout entier naturel n, $A_{6n} = A_0$.

Maintenant, $2012 = 6 \times 335 + 2$ et d'après ce qui précède $A_{2010} = A_{6\times 335} = A_0$. Donc

$$A_{2012} = r\left(r\left(A_{2010}\right)\right) = r\left(r\left(A_0\right)\right) = A_2.$$

$$\boxed{z_{2012} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}.}$$



3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $r(A_n) = A_{n+1}$ et que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a $\Omega A_n = \Omega A_{n+1}$ et $\widehat{A_n \Omega A_{n+1}} = \frac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle $A_n \Omega A_{n+1}$ est isocèle en Ω et a ses trois angles égaux à $\frac{\pi}{3}$. Finalement, le triangle $A_n \Omega A_{n+1}$ est équilatéral. On en déduit que $A_n A_{n+1} = \Omega A_n$.

Ensuite, pour tout entier naturel n, $\Omega A_{n+1} = \Omega A_n$, et donc la suite $(\Omega A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Par suite, pour tout entier naturel n

$$A_nA_{n+1} = \Omega A_n = \Omega A_0 = |z_0 - \omega| = |-\omega| = |\omega| = \sqrt{1^1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_nA_{n+1} = 2.}$

