EXERCICE 4

1) Un triangle.

a) $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-i\sqrt{3}(-1-i\sqrt{3})}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$. Maintenant, on sait que

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

(car $-i\sqrt{3}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative). En particulier,

$$\boxed{\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.}$$

b) Ainsi, le triangle ABC est rectangle en B. On en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC ou encore le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[AC]$. Ainsi,

$$\omega = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ est le point } \Omega \text{ d'affixe } \omega = 1+i\sqrt{3}.}$$

2) Une transformation du plan.

a) • $z_1 = 0+2 = 2$.

• $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 2+2 = 1+i\sqrt{3}+2 = 3+i\sqrt{3}$.

• $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(3+i\sqrt{3})+2 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{2}+2 = 2+\dfrac{4i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3}$.

• $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(2+2i\sqrt{3})+2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2+2 = 1+2i\sqrt{3}-3+2 = 2i\sqrt{3}$.

b) • $A_1A_2 = ||z_2-z_1| = \left|3+i\sqrt{3}-2\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_2A_3 = ||z_3-z_2| = \left|2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

• $A_3A_4 = ||z_4-z_3| = \left|2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}\right| = |-2| = 2$.

$$\boxed{A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 2.}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)+\omega &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3}) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{1+2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{2}+1+i\sqrt{3}\\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}+1+i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2\\ &= z_{n+1},\end{aligned}$$

et donc $z_{n+1}-\omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1}-\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega).}$$

d) Soit r la transformation du plan d'expression complexe $z' = \omega+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z-\omega)$.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3},$$

et donc r est la transformation d'expression complexe $z' = \omega + e^{i\pi/3}(z - \omega)$. On sait que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+1} = r(A_n) \text{ où } r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Omega A_{n+6} = \Omega A_{n+5} = \ldots = \Omega A_{n+1} = \Omega A_n$. D'autre part, d'après la relation de Chales,

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+2}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+5}}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 6 \times \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

et donc $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. En résumé, $\Omega A_n = \Omega A_{n+6}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}\right) = 0\ [2\pi]$. On en déduit que $\overrightarrow{\Omega A_n} = \overrightarrow{\Omega A_{n+6}}$ puis que $A_{n+6} = A_n$.

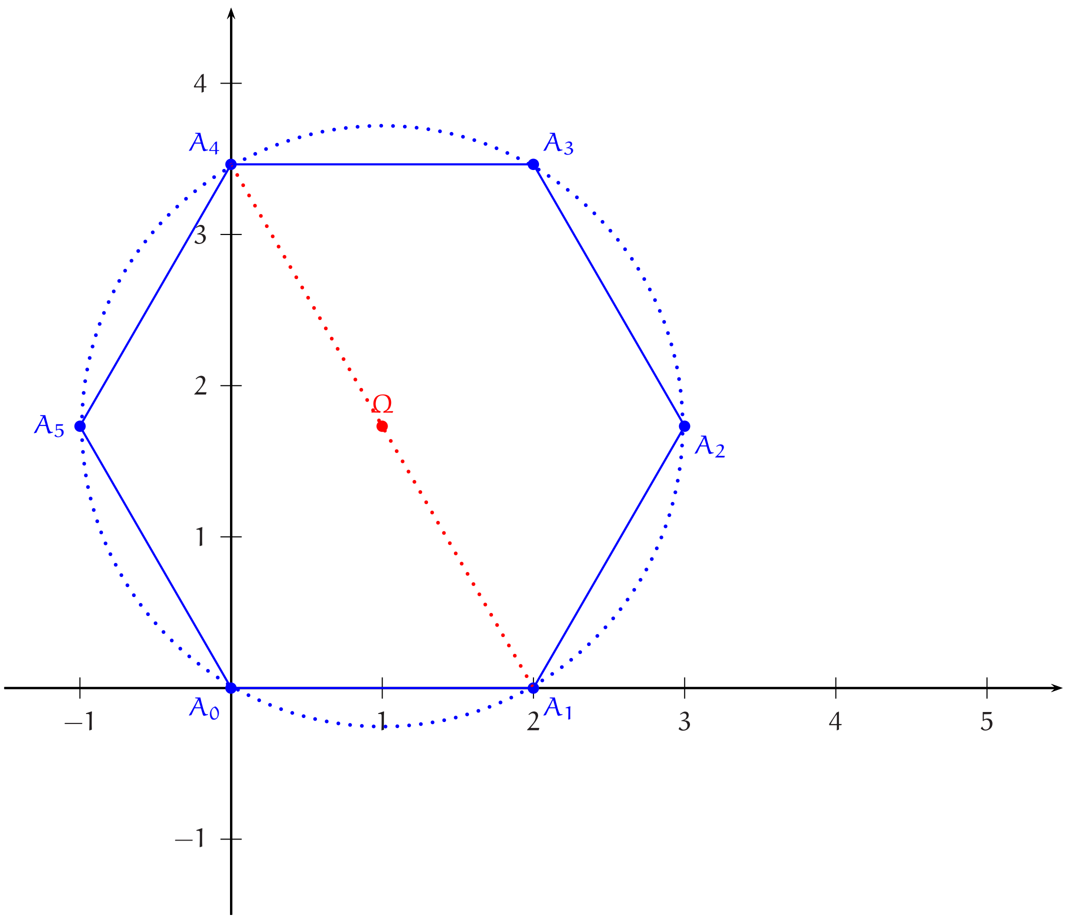
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_{n+6} = A_n.}$$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, $A_{6(n+1)} = A_{6n+6} = A_{6n}$. Donc la suite $(A_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ou encore, pour tout entier naturel n, $A_{6n} = A_0$.

Maintenant, $2012 = 6 \times 335 + 2$ et d'après ce qui précède $A_{2010} = A_{6\times 335} = A_0$. Donc

$$A_{2012} = r\left(r\left(A_{2010}\right)\right) = r\left(r\left(A_0\right)\right) = A_2.$$

$$\boxed{z_{2012} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}.}$$



3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $r(A_n) = A_{n+1}$ et que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, on a $\Omega A_n = \Omega A_{n+1}$ et $\widehat{A_n \Omega A_{n+1}} = \dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle $A_n\Omega A_{n+1}$ est isocèle en Ω et a ses trois angles égaux à $\dfrac{\pi}{3}$. Finalement, le triangle $A_n\Omega A_{n+1}$ est équilatéral. On en déduit que $A_nA_{n+1} = \Omega A_n$.

Ensuite, pour tout entier naturel n, $\Omega A_{n+1} = \Omega A_n$, et donc la suite $(\Omega A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Par suite, pour tout entier naturel n

$$A_nA_{n+1} = \Omega A_n = \Omega A_0 = |z_0 - \omega| = |-\omega| = |\omega| = \sqrt{1^1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ A_nA_{n+1} = 2.}$$

