EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Un triangle

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$3 + i\sqrt{3}, \quad 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}.$$

On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$ $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega).$$

où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1.b)**.

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.