EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a)** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b) Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de mai 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

Partie A

1)

$$\begin{aligned}
P(z_0) &= \left(i\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) - 2i\sqrt{2}\\
&= -2i\sqrt{2} + 2\left(2+i\sqrt{2}\right) + 2\left(i\sqrt{2}-2\right) - 2i\sqrt{2}\\
&= -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0
\end{aligned}$$

Donc $P(z_0) = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. Pour tout nombre complexe z,

$$\begin{aligned}
(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2}\\
&= z^3 + \left(a - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - ia\sqrt{2}\right)z - ib\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Si on choisit les réels a et b tels que $\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right.$, alors pour tout nombre complexe z on aura $(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b) = P(z)$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b + 2i\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\end{array}\right. .$$

Donc

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)(z^2 - 2z + 2).}$$

b) Soit z un nombre complexe.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Donc l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{i\sqrt{2}, 1+i, 1-i\right\}.}$$

Partie B

1) Voir figure en fin d'exercice.

2) Le point K est le milieu du segment [JL]. Par suite, $\dfrac{z_L + z_J}{2} = z_K$ puis

$$z_L = 2z_K - z_J = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

$$\boxed{z_L = -\sqrt{2}.}$$

3) • $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
• $OB = |z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
• $OJ = |z_J| = \sqrt{2}|i| = \sqrt{2}$.
• $OL = \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{Les points } A, B, J \text{ et } L \text{ appartiennent au cercle de centre } O \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$$

4) a) Puisque $OJ = OD = \sqrt{2}$, r existe. Son angle est $\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right)$. On sait que $\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_O}{z_J - z_O}\right)$ $[2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned}\frac{z_D - z_O}{z_J - z_O} &= \frac{-1+i}{i\sqrt{2}} = \frac{(-1+i)(-i)}{i\sqrt{2}(-i)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\pi/4},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].}$$

b) L'expression complexe de r est donc $z' = e^{i\pi/4}z$. Par suite,

$$z_C = e^{i\pi/4}z_L = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1 - i.$$

$$\boxed{z_C = -1 - i.}$$

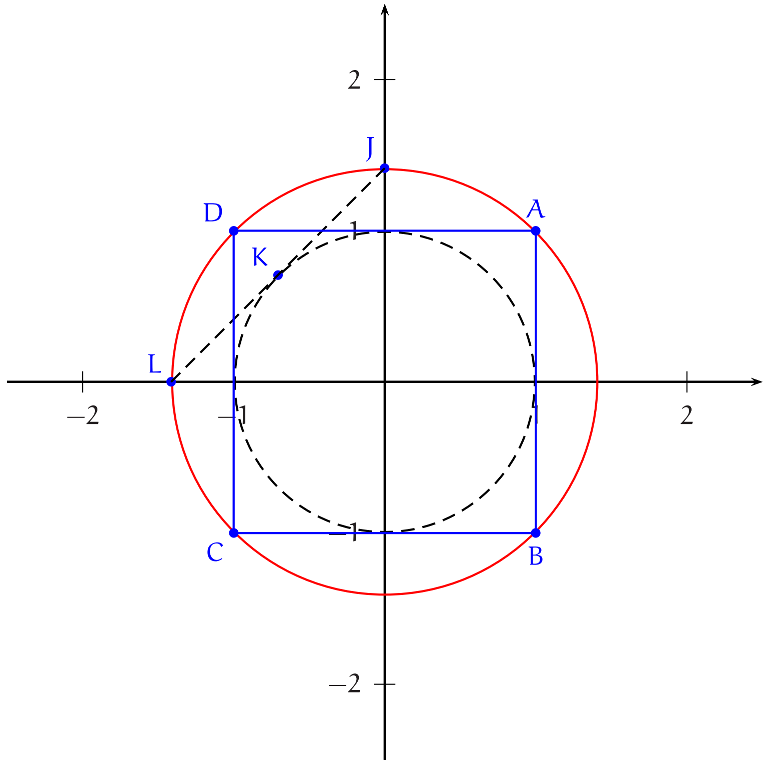
5) • $z_C = -z_A$ et donc O est le milieu du segment [AC]. De même, $z_D = -z_B$ et donc O est le milieu du segment [BD]. Ainsi, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont même milieu et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

• Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$. Par suite, $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ et $BD = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. En particulier, $AC = BD$. D'autre part,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (-2) \times (-2) + (-2) \times 2 = 0,$$

et donc $(AC) \perp (BD)$. En résumé, les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et ont même longueur. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré.}}$$


J
D
A
K
L
C
B
2
1
−1
−2
−2
−1
2

