

EXERCICE 1

Partie A

1)

$$\begin{aligned} P(z_0) &= (i\sqrt{2})^3 - (2 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1 + i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} \\ &= -2i\sqrt{2} + 2(2 + i\sqrt{2}) + 2(i\sqrt{2} - 2) - 2i\sqrt{2} \\ &= -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $P(z_0) = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. Pour tout nombre complexe z ,

$$\begin{aligned} (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2} \\ &= z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ia\sqrt{2})z - ib\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si on choisit les réels a et b tels que $\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2 + i\sqrt{2}) \\ b - ia\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases}$, alors pour tout nombre complexe z on aura

$(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = P(z)$. Or,

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -(2 + i\sqrt{2}) \\ b - ia\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b + 2i\sqrt{2} = 2(1 + i\sqrt{2}) \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Donc

Pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$.

b) Soit z un nombre complexe.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Donc l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$.

Pour tout nombre complexe z , $P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{i\sqrt{2}, 1 + i, 1 - i\}$.

Partie B

1) Voir figure en fin d'exercice.

2) Le point K est le milieu du segment [JL]. Par suite, $\frac{z_L + z_J}{2} = z_K$ puis

$$z_L = 2z_K - z_J = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

$$z_L = -\sqrt{2}.$$

- 3) • $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
 • $OB = |z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
 • $OJ = |z_J| = \sqrt{2}|i| = \sqrt{2}$.
 • $OL = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

Les points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4) a) Puisque $OJ = OD = \sqrt{2}$, r existe. Son angle est (\vec{OJ}, \vec{OD}) . On sait que $(\vec{OJ}, \vec{OD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_O}{z_J - z_O}\right)$ $[2\pi]$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_O}{z_J - z_O} &= \frac{-1 + i}{i\sqrt{2}} = \frac{(-1 + i)(-i)}{i\sqrt{2}(-i)} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\pi/4}, \end{aligned}$$

et donc

$$(\vec{OJ}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

b) L'expression complexe de r est donc $z' = e^{i\pi/4}z$. Par suite,

$$z_C = e^{i\pi/4}z_L = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(-\sqrt{2}) = -1 - i.$$

$$z_C = -1 - i.$$

5) • $z_C = -z_A$ et donc O est le milieu du segment [AC]. De même, $z_D = -z_B$ et donc O est le milieu du segment [BD]. Ainsi, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu et donc ABCD est un parallélogramme.

• Le vecteur \vec{AC} a pour coordonnées $(-2, -2)$ et le vecteur \vec{BD} a pour coordonnées $(-2, 2)$. Par suite, $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ et $BD = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. En particulier, $AC = BD$. D'autre part,

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (-2) \times (-2) + (-2) \times 2 = 0,$$

et donc $(AC) \perp (BD)$. En résumé, les diagonales du parallélogramme ABCD sont perpendiculaires et ont même longueur. On en déduit que

le quadrilatère ABCD est un carré.

