EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a)** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b) Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.