EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. **a.** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.

c. Vérifier que l'affixe s du point S milieu de $[AA']$ est $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$.

d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de $[CC']$, B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de $[BB']$.

On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2 - 5i$.

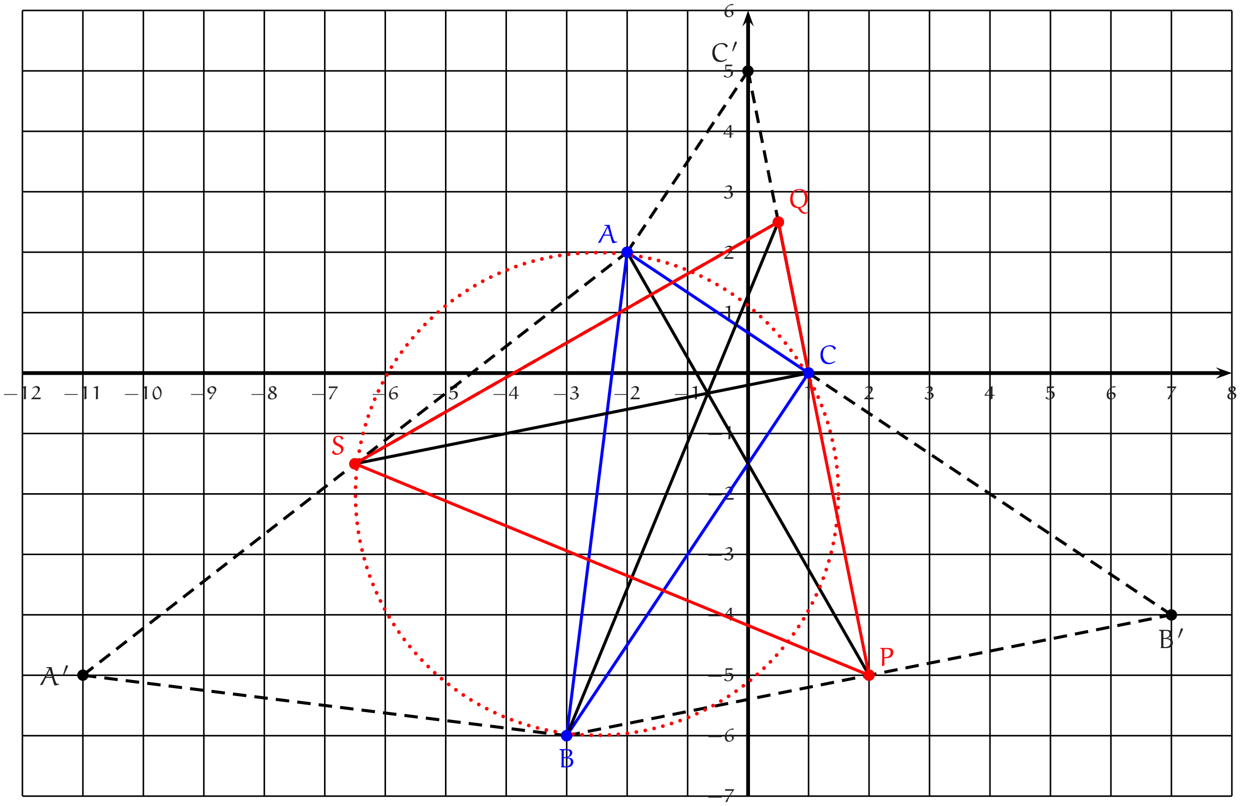
a. Démontrer que $\frac{s-q}{p-a} = -i$.

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments $[AP]$ et $[QS]$ sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

EXERCICE 2



1) • $AB^2 = |b-a|^2 = |(-3-6i)-(-2+2i)|^2 = |-1-8i|^2 = (-1)^2+(-8)^2 = 65$.
• $AC^2 = |c-a|^2 = |1-(-2+2i)|^2 = |3-2i|^2 = 3^2+(-2)^2 = 13$.
• $CB^2 = |b-c|^2 = |(-3-6i)-1|^2 = |-4-6i|^2 = (-4)^2+(-6)^2 = 52$.

Par suite, $AC^2 + CB^2 = 13+52 = 65 = AB^2$ et donc, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE,

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C.}$$

2) a) L'écriture complexe de r est $z' = z_B + e^{\frac{i\pi}{2}}(z-z_B)$ ou encore $z' = -3-6i+i(z+3+6i)$ ou enfin $z' = iz-9-3i$.

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = iz-9-3i.}$$

b) $z'_A = iz_A - 9 - 3i = i(-2+2i)-9-3i = -11-5i$.

$$\boxed{\text{L'affixe de } A' \text{ est } -11-5i.}$$

c) $z_S = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2} = \dfrac{-2+2i-11-5i}{2} = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

d) Le triangle ABC est rectangle en C d'après la première question. Le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle de diamètre $[AB]$.
Puisque $A' = r(A)$, le triangle ABA' est isocèle en B. La médiane issue de B du triangle ABA', à savoir la droite (BS) est donc aussi la hauteur issue de B de ce même triangle. Par suite, la droite (BS) est perpendiculaire à la droite (AA') ou encore le triangle (ASB) est rectangle en S. On en déduit que le point S appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ou encore le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) $\dfrac{s-q}{p-a} = \dfrac{-\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}i-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i}{2-5i+2-2i} = \dfrac{-7-4i}{4-7i} = \dfrac{-i(4-7i)}{4-7i} = -i$.

b) On en déduit que :

(1) : $\dfrac{QS}{AP} = \dfrac{|s-q|}{|p-a|} = \left|\dfrac{s-q}{p-a}\right| = |-i| = 1$ et donc $AP = QS$.

(2) : $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QS}\right) = \arg\left(\dfrac{s-q}{p-a}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et donc $(AP)\perp(QS)$.

4) $\dfrac{s-p}{q-b} = \dfrac{-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i - 2 + 5i}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i + 3 + 6i} = \dfrac{-\dfrac{17}{2} + \dfrac{7}{2}i}{\dfrac{7}{2} + \dfrac{17}{2}i} = \dfrac{-17+7i}{7+17i} = \dfrac{i(7+17i)}{7+17i} = i$ puis

$$\left(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{PS}\right) = \arg\left(\frac{s-p}{q-b}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

et donc $(BQ)\perp(PS)$. De même, $\dfrac{q-p}{s-c} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i - 2 + 5i}{-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}i - 1} = \dfrac{-\dfrac{3}{2} + \dfrac{15}{2}i}{-\dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2}i} = \dfrac{-3+15i}{-15-3i} = \dfrac{-i(-15-3i)}{-15-3i} = -i$ puis $(CS)\perp(PQ)$.

En résumé, $(AP)\perp(QS)$ ou encore (AP) est la hauteur issue de P du triangle PQS et de même (BQ) et (CS) sont les hauteurs issues respectivement de Q et S du triangle PQS. On sait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'othocentre de ce triangle et donc les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

