EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. **a.** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.
c. Vérifier que l'affixe s du point S milieu de $[AA']$ est $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$.
d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de $[CC']$, B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de $[BB']$.
On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2 - 5i$.

a. Démontrer que $\dfrac{s-q}{p-a} = -i$.
b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments $[AP]$ et $[QS]$ sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.