EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M)=M$.
2) Soit A le point d'affixe $a=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$.
   a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4) Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.
   a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2-iz-1+i=0$ et $z\neq 1$.
   b) Montrer que $z^2-iz-1+i=(z-1)(z+1-i)$.
   c) En déduire l'ensemble Γ_3.
5) Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   a) Exprimer $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$ en fonction d'un argument de z.
   b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

EXERCICE 4

1) Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \Leftrightarrow M = O \text{ ou } M = \Omega.$$

$$\boxed{\Gamma_1 = \{O, \Omega\}.}$$

2) a) $|a| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$ puis

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-i\pi/4}.$$

$$\boxed{a = 2e^{-i\pi/4}.}$$

b) $f(O) = O$ et donc $f(O) \neq A$. Soit M un point du plan distinct de O d'affixe $z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
f(M) = A \Leftrightarrow z^2 = a &\Leftrightarrow |z^2| = |a| \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z^2) = \arg(a) + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 2\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \text{ et il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z) = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ ou } z = -\sqrt{2}e^{-i\pi/8} \text{ (car bien sûr, } z^2 = a \Leftrightarrow (-z)^2 = a).
\end{aligned}$$

Les affixes des deux antécédents du point A sont $\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$ et $-\sqrt{2}e^{-i\pi/8}$.

3) Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Par suite,

$$z' \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x.$$

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la réunion des deux droites d'équations respectives } y = x \text{ et } y = -x.}$$

4) (a) L'expression complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' = 1 + e^{i\pi/2}(z-1)$ ou encore $z' = 1 + i(z-1)$ ou enfin $z' = iz + 1 - i$.

Soit M un point du plan distinct de Ω dont l'affixe est notée z ($z \neq 1$).

$$\begin{aligned}
\Omega MM' \text{ rectangle isocèle direct en } \Omega &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega M' \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ (et } M \neq \Omega) \\
&\Leftrightarrow r(M) = M' \text{ (et } M \neq \Omega) \\
&\Leftrightarrow z^2 = iz + 1 - i \text{ (et } z \neq 1) \\
&\Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ (et } z \neq 1).
\end{aligned}$$

(b) Soit z un nombre complexe.

$$(z-1)(z+1-i) = z^2 - z + (1-i)z - (1-i) = z^2 - iz - 1 + i.$$

c) Soit M un point du plan distinct de Ω dont l'affixe est notée z. D'après les deux questions précédentes

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-i) = 0 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z = -1 + i.$$

$$\boxed{\Gamma_3 = \{B\} \text{ où } z_B = -1 + i.}$$

5) a) Soit Soit M un point du plan dont l'affixe z est différente de 0 et de 1.

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg\left(\frac{z' - 0}{z - 0}\right) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) = \arg(z)\ [2\pi].$$

b) Soit Soit M un point du plan distinct de O et de Ω. Alors $M \neq O$, $M' \neq O$ et enfin, d'après la question 1), $M' \neq M$. En résumé, les points O, M et M' sont deux à deux distincts. Ensuite,

$$O,\ M \text{ et } M' \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ (et } z \notin \{0, 1\}).$$

$$\boxed{\Gamma_4 \text{ est l'axe } (Ox) \text{ privé des points } O \text{ et } \Omega.}$$

