EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$.
2) Soit A le point d'affixe $a=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.
   a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4) Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega\mathrm{M}\mathrm{M}'$ est rectangle isocèle direct en Ω.
   a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2-\mathrm{i}z-1+\mathrm{i}=0$ et $z\neq 1$.
   b) Montrer que $z^2-\mathrm{i}z-1+\mathrm{i}=(z-1)(z+1-\mathrm{i})$.
   c) En déduire l'ensemble Γ_3.
5) Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   a) Exprimer $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.