EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i\left(-2 - \sqrt{3}\right)$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. **a.** Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.

c. Montrer que $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Notons B' l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ (que l'on note r). On sait que l'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est $z' = z_\Omega + e^{i\theta}(z - z_\Omega)$. Donc

$$z_{B'} = z_A + e^{2i\pi/3}(z_B - z_A) = 1 + \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(3+4i-1) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+4i)$$
$$= 1 - 1 - 2i + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + i\left(-2+\sqrt{3}\right) = z_D.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'image du point B par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ est le point } D.}$$

b) Puisque $r(B) = D$, par définition d'une rotation, on a $AB = AD$. B et D sont donc sur un certain cercle de centre A. Le rayon de ce cercle est

$$AB = |z_B - z_A| = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\boxed{\text{B et D sont sur le cercle de centre A et de rayon } 2\sqrt{5}.}$$

2) a) On sait que l'expression complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est $z' = z_\Omega + k(z - z_\Omega)$. Donc

$$z_F = z_B + \frac{3}{2}(z_A - z_B) = 3+4i+\frac{3}{2}(1-3-4i) = 3+4i+\frac{3}{2}(-2-4i) = 3+4i-3-6i = -2i.$$

$$\boxed{z_F = -2i.}$$

b) L'affixe du milieu du segment [CD] est

$$\frac{z_C+z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})-2\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-2)}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F.$$

Donc,

$$\boxed{\text{le point F est le milieu du segment [CD].}}$$

c)

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})+2i}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1+2i} = \frac{-i\sqrt{3}(1+2i)}{1+2i}$$
$$= -i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}.}$$

De plus, $-i\sqrt{3} = \sqrt{3}(-i) = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\,e^{-i\pi/2}$. Donc

$$\boxed{\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}\,e^{-i\pi/2}.}$$

En particulier, $\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On en déduit que la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC).

En résumé, le point F est le milieu du segment $[CD]$ et la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC). Par suite,

$$\boxed{\text{la droite } (AF) \text{ est la médiatrice du segment } [CD].}$$

3) On place les points A et B puis le point F. On construit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A passant par B. D'après la question 1)b), le point D est sur ce cercle. Comme le point A est sur la médiatrice du segment $[CD]$ d'après 2)c), le point C est également sur ce cercle. On construit alors la perpendiculaire (Δ) à la droite (AF) en F. Toujours d'après 2)c), les points C et D sont également sur cette droite et sont donc les points d'intersection de (Δ) et de $(\mathscr{C})$. Enfin, le point C est celui des deux points obtenus qui a la plus grande abscisse.