

# BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

## EXERCICE 1

1) a) Notons  $B'$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  (que l'on note  $r$ ). On sait que l'expression complexe de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est  $z' = z_{\Omega} + e^{i\theta}(z - z_{\Omega})$ . Donc

$$\begin{aligned} z_{B'} &= z_A + e^{2i\pi/3}(z_B - z_A) = 1 + \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) (3 + 4i - 1) = 1 + \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2 + 4i) \\ &= 1 - 1 - 2i + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) = z_D. \end{aligned}$$

Ainsi,

l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  est le point  $D$ .

b) Puisque  $r(B) = D$ , par définition d'une rotation, on a  $AB = AD$ .  $B$  et  $D$  sont donc sur un certain cercle de centre  $A$ . Le rayon de ce cercle est

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$B$  et  $D$  sont sur le cercle de centre  $A$  et de rayon  $2\sqrt{5}$ .

2) a) On sait que l'expression complexe de l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  est  $z' = z_{\Omega} + k(z - z_{\Omega})$ . Donc

$$z_F = z_B + \frac{3}{2}(z_A - z_B) = 3 + 4i + \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) = 3 + 4i + \frac{3}{2}(-2 - 4i) = 3 + 4i - 3 - 6i = -2i.$$

$$z_F = -2i.$$

b) L'affixe du milieu du segment  $[CD]$  est

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 2)}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F.$$

Donc,

le point  $F$  est le milieu du segment  $[CD]$ .

c)

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} &= \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 + 2i} = \frac{-i\sqrt{3}(1 + 2i)}{1 + 2i} \\ &= -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}.$$

De plus,  $-i\sqrt{3} = \sqrt{3}(-i) = \sqrt{3} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \sqrt{3} e^{-i\pi/2}$ . Donc

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3} e^{-i\pi/2}.$$

En particulier,  $(\vec{FA}, \vec{FC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ . On en déduit que la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC).

En résumé, le point F est le milieu du segment [CD] et la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (FC). Par suite,

la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

**3)** On place les points A et B puis le point F. On construit le cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre A passant par B. D'après la question 1)b), le point D est sur ce cercle. Comme le point A est sur la médiatrice du segment [CD] d'après 2)c), le point C est également sur ce cercle. On construit alors la perpendiculaire ( $\Delta$ ) à la droite (AF) en F. Toujours d'après 2)c), les points C et D sont également sur cette droite et sont donc les points d'intersection de ( $\Delta$ ) et de ( $\mathcal{C}$ ). Enfin, le point C est celui des deux points obtenus qui a la plus grande abscisse.

