EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0.$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. **a)** Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.

b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b).$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2 + 2i$ et $1 - i$.

1. Représenter les points A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.

5. Quelle est la nature de $OCDB$?

EXERCICE 2

Partie A

1) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x^3-(4+i)x^2+(7+i)x-4=0 &\Leftrightarrow (x^3-4x^2+7x-4)+i(-x^2+x)=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^3-4x^2+7x-4=0\\ \quad\text{et}\\ -x(x-1)=0\end{array}\right. \quad \text{(puisque } x \text{ est réel)}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0\\ \text{et}\\ x^3-4x^2+7x-4=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=1\\ \text{et}\\ x^3-4x^2+7x-4=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ (car } 1-4+7-4=0 \text{ et } 0-0+0-4\neq 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{z_1=1.}$$

b) Soient a, b et z trois nombres complexes.

$$\begin{aligned}(z-1)(z-2-2i)(az+b)&=(z^2+(-2-2i-1)z-(-2-2i))(az+b)=(z^2-(3+2i)z+(2+2i))(az+b)\\ &=az^3+(-(3+2i)a+b)z^2+((2+2i)a-(3+2i)b)z+b(2+2i).\end{aligned}$$

En considérant les coefficients de z^3 et de z^0, on choisit alors a et b tels que $a=1$ et $b(2+2i)=-4$. On a

$$b(2+2i)=-4 \Leftrightarrow b=\frac{-4}{2+2i} \Leftrightarrow b=-\frac{2}{1+i} \Leftrightarrow b=-\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow b=-\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} \Leftrightarrow b=-1+i.$$

Maintenant, si $a=1$ et $b=-1+i$ alors

$$-(3+2i)a+b=-(3+2i)-1+i=-(4+i),$$

et

$$(2+2i)a-(3+2i)b=(2+2i)-(3+2i)(-1+i)=2+2i+5-i=7+i.$$

Par suite,

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-1)(z-2-2i)(z-1+i).}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)=0 \Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z=2+2i \text{ ou } z=1-i.$$

En notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E), on a donc

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1,2+2i,1-i\}.}$$

Partie B

1) Voir graphique à la fin de l'exercice.

2) $\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+2i-1)}{1^2+1^2}=2i=2e^{i\pi/2}$ et donc

$$\boxed{\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=2 \text{ et } \arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par suite,

$$\boxed{\text{le triangle } OBC \text{ est rectangle en } O.}$$

3) On a $z_B = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$.
De même, $z_C = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donc $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = -\arg(z_C) = \frac{\pi}{4}$.
Par suite, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la droite } (OA) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{O} \text{ du triangle } OBC.}$$

4) L'expression complexe de la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = e^{-i\pi/2}(z - z_C) + z_C = -i(z-1+i)+1-i = -iz+2,$$

et en particulier

$$z_D = -i \times 0 + 2 = 2.$$

$$\boxed{z_D = 2.}$$

5) On sait déjà que l'angle $\widehat{COB}$ est un angle droit. D'autre part, puisque $\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{\pi}{2}$, l'angle $\widehat{OCD}$ est également un angle droit. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OCDN \text{ est un trapèze rectangle.}}$$