EXERCICE 2

Partie A

1) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^3-(4+i)x^2+(7+i)x-4=0 &\Leftrightarrow (x^3-4x^2+7x-4)+i(-x^2+x)=0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3-4x^2+7x-4=0 \\ \quad\text{et} \\ -x(x-1)=0 \end{array}\right. \quad \text{(puisque } x \text{ est réel)} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{et} \\ x^3-4x^2+7x-4=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ \text{et} \\ x^3-4x^2+7x-4=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ (car } 1-4+7-4=0 \text{ et } 0-0+0-4\neq 0). \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1=1.}$$

b) Soient a, b et z trois nombres complexes.

$$\begin{aligned} (z-1)(z-2-2i)(az+b) &= (z^2+(-2-2i-1)z-(-2-2i))(az+b) = (z^2-(3+2i)z+(2+2i))(az+b) \\ &= az^3+(-(3+2i)a+b)z^2+((2+2i)a-(3+2i)b)z+b(2+2i). \end{aligned}$$

En considérant les coefficients de z^3 et de z^0, on choisit alors a et b tels que $a=1$ et $b(2+2i)=-4$. On a

$$b(2+2i)=-4 \Leftrightarrow b=\frac{-4}{2+2i} \Leftrightarrow b=-\frac{2}{1+i} \Leftrightarrow b=-\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow b=-\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} \Leftrightarrow b=-1+i.$$

Maintenant, si $a=1$ et $b=-1+i$ alors

$$-(3+2i)a+b=-(3+2i)-1+i=-(4+i),$$

et

$$(2+2i)a-(3+2i)b=(2+2i)-(3+2i)(-1+i)=2+2i+5-i=7+i.$$

Par suite,

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-1)(z-2-2i)(z-1+i).}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)=0 \Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z=2+2i \text{ ou } z=1-i.$$

En notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E), on a donc

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1, 2+2i, 1-i\}.}$$

Partie B

1) Voir graphique à la fin de l'exercice.

2) $\dfrac{2+2i}{1-i}=\dfrac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+2i-1)}{1^2+1^2}=2i=2e^{i\pi/2}$ et donc

$$\boxed{\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=2 \text{ et } \arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par suite,

$$\boxed{\text{le triangle OBC est rectangle en O.}}$$

3) On a $z_B = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$.

De même, $z_C = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donc $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = -\arg(z_C) = \frac{\pi}{4}$.

Par suite, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la droite (OA) est la bissectrice de l'angle } \widehat{O} \text{ du triangle OBC.}}$$

4) L'expression complexe de la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = e^{-i\pi/2}(z - z_C) + z_C = -i(z - 1 + i) + 1 - i = -iz + 2,$$

et en particulier

$$z_D = -i \times 0 + 2 = 2.$$

$$\boxed{z_D = 2.}$$

5) On sait déjà que l'angle $\widehat{COB}$ est un angle droit. D'autre part, puisque $\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{\pi}{2}$, l'angle $\widehat{OCD}$ est également un angle droit. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère OCDN est un trapèze rectangle.}}$$