EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$.

1) **a)** Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

c) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.

a) Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r.

3) Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O. Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.

a) Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.

b) Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.

c) Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

d) En déduire que I est le milieu de $[OC]$ puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i.$$

4) Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.

a) Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

b) Placer D' image de D par la rotation r définie à la question **2)**.
On note $z_{D'}$ l'affixe de D'.
Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.

5) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 4

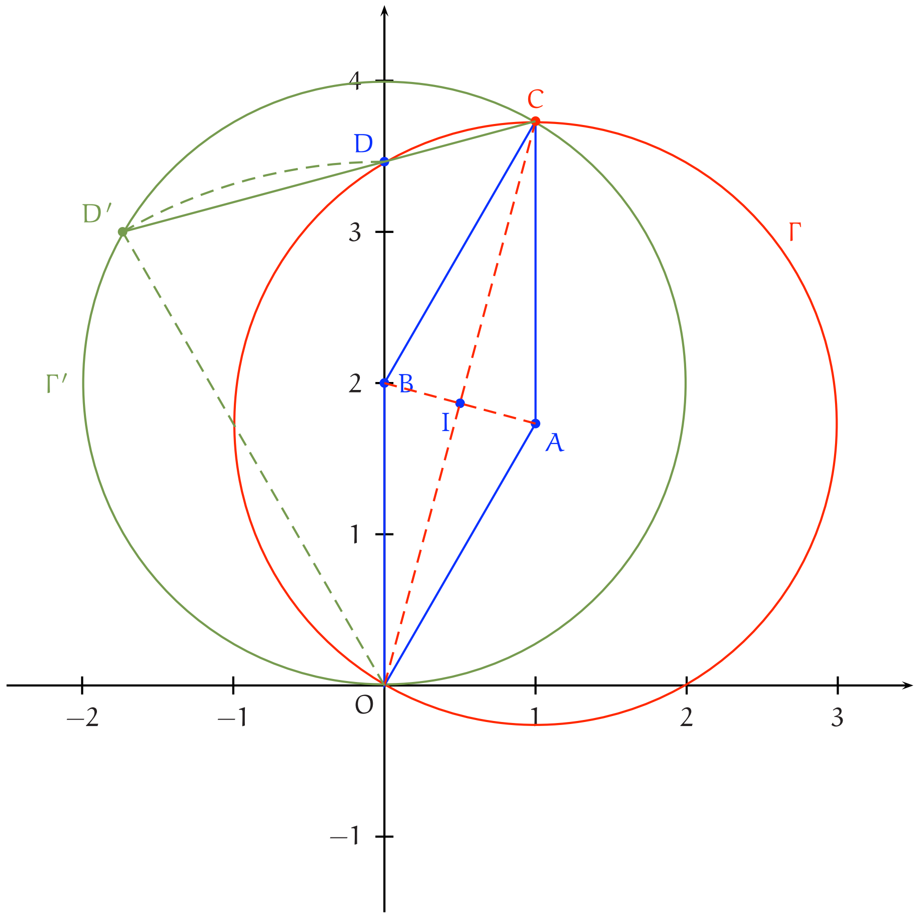
1) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Ensuite, $z_B = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\pi/2}$.

$$\boxed{z_A = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_B = 2e^{i\pi/2}.}$$

b)



c) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. Donc $OA = OB$ et

$$\boxed{\text{le triangle OAB est isocèle en O.}}$$

2) a) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - 0}{z_A - 0}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].}$$

b) r est donc la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Son expression complexe est $z' = 0 + e^{i\pi/6}(z - 0)$ ou encore $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z$.

$$\boxed{\text{L'expression complexe de } r \text{ est } z' = e^{i\pi/6}z \text{ ou aussi } z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z.}$$

3) a) Le cercle de centre A (resp. B) passant par O est le cercle de centre A (resp. B) et de rayon 2
L'image par r du cercle de centre A et de rayon 2 est le cercle de centre $r(A) = B$ et de même rayon à savoir 2. Donc

$$\boxed{\text{l'image par } r \text{ du cercle } \Gamma \text{ est le cercle } \Gamma'.}$$

b) $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \dfrac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{2}$.
c) C appartient à Γ et à Γ'. Donc, $AC = 2 = BC$. Ainsi, $OA = OB = AC = BC$ et

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OACB \text{ est un losange.}}$$

d) Mais alors le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[OC]$.
On en déduit que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ ou encore que $z_C = 2z_I = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i$.

$$\boxed{z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right) i.}$$

4) a) $AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et donc le point D appartient au cercle Γ.
b) D'après la question 2)b),

$$z_{D'} = e^{i\pi/6} z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) \times (2i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i.$$

5)

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \left(1 + (2 + \sqrt{3})i\right) - \left(2i\sqrt{3}\right) = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right) i$$

et

$$z_{\overrightarrow{DD'}} = z_{D'} - z_D = \left(-\sqrt{3} + 3i\right) - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i.$$

Donc

$$-\sqrt{3} z_{\overrightarrow{DC}} = -\sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right) i = z_{\overrightarrow{DD'}}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. On en déduit encore que

$$\boxed{\text{les points } C, D \text{ et } D' \text{ sont alignés.}}$$

