

EXERCICE 4

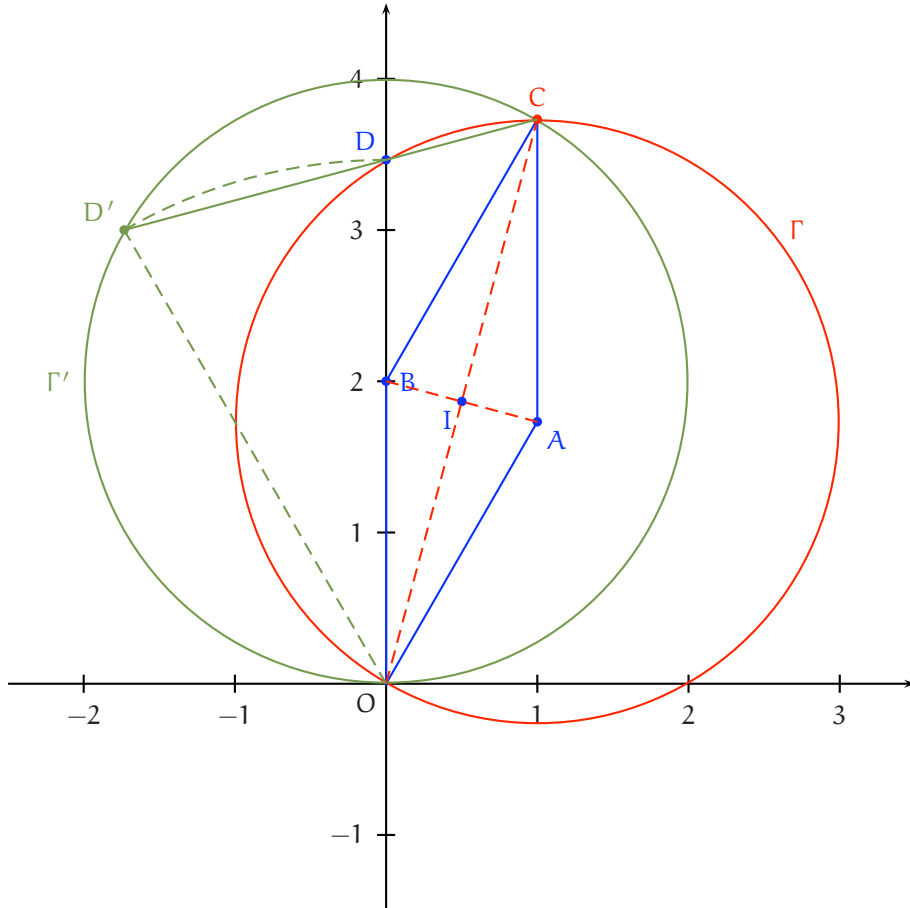
1) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ puis

$$z_A = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Ensuite, $z_B = 2i = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2e^{i\pi/2}.$

$$z_A = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_B = 2e^{i\pi/2}.$$

b)



c) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$. Donc $OA = OB$ et

le triangle OAB est isocèle en O .

2) a) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/3}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} = e^{i\pi/6}$. On en déduit que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg \left(\frac{z_B - 0}{z_A - 0} \right) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

b) r est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Son expression complexe est $z' = 0 + e^{i\pi/6}(z - 0)$ ou encore

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z.$$

L'expression complexe de r est $z' = e^{i\pi/6}z$ ou aussi $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z$.

3) a) Le cercle de centre A (resp. B) passant par O est le cercle de centre A (resp. B) et de rayon 2
 L'image par r du cercle de centre A et de rayon 2 est le cercle de centre $r(A) = B$ et de même rayon à savoir 2. Donc

l'image par r du cercle Γ est le cercle Γ' .

b) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{2}$.

c) C appartient à Γ et à Γ' . Donc, $AC = 2 = BC$. Ainsi, $OA = OB = AC = BC$ et

le quadrilatère OACB est un losange.

d) Mais alors le milieu I de [AB] est aussi le milieu de [OC].

On en déduit que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ ou encore que $z_C = 2z_I = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

$z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

4) a) $AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et donc le point D appartient au cercle Γ .

b) D'après la question 2)b),

$$z_{D'} = e^{i\pi/6} z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \times (2i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 3i.$$

5)

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = (1 + (2 + \sqrt{3})i) - (2i\sqrt{3}) = 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

et

$$z_{\overrightarrow{DD'}} = z_{D'} - z_D = (-\sqrt{3} + 3i) - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i.$$

Donc

$$-\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}} = -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i = z_{\overrightarrow{DD'}}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$ et donc que les vecteurs \overrightarrow{DC} et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. On en déduit encore que

les points C, D et D' sont alignés.