EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}\ ,\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$.

1) **a)** Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

c) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.

a) Calculer un argument du quotient $\frac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r.

3) Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O. Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.

a) Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.

b) Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.

c) Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

d) En déduire que I est le milieu de $[OC]$ puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i.$$

4) Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.

a) Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

b) Placer D' image de D par la rotation r définie à la question **2)**.
On note $z_{D'}$ l'affixe de D'.
Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i.$

5) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?