EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1) Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$ et $b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,;-1)$, $(D\,;+1)$, $(B\,;+1)$.

a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.

b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5) Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2.$$

L'équation proposée admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3} - 4i.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \text{ sont } 4\sqrt{3} + 4i \text{ et } 4\sqrt{3} - 4i.}$$

2) a)

$$a = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\boxed{a = 8e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = 8e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b) $OA = |a - 0| = |8e^{-i\frac{\pi}{6}}| = 8$ et $OB = |b| = |a| = 8$. D'autre part, $AB = |b - a| = \left|(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)\right| = |8i| = 8$. Finalement, $OA = OB = AB = 8$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

$$\boxed{\text{Le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}}$$

3) L'expression complexe de la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$ ou encore $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Donc

$$d = e^{-i\frac{\pi}{3}}c = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + i) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i = 2i.$$

$$\boxed{d = 2i.}$$

4) a) La somme des coefficients vaut $-1 + 1 + 1$ c'est-à-dire 1. Cette somme n'est pas nulle et donc G existe. De plus

$$g = \frac{-0 + d + b}{-1 + 1 + 1} = (2i) + (4\sqrt{3} + 4i) = 4\sqrt{3} + 6i.$$

$$\boxed{g = 4\sqrt{3} + 6i.}$$

b) Voir graphique à la fin de l'exercice.
c) On a $d - c = (2i) - (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i$ ou encore $\overrightarrow{CD}(\sqrt{3}, 1)$. D'autre part, $g - c = (4\sqrt{3} + 6i) - (-\sqrt{3} + i) = 5\sqrt{3} + 5i$ ou encore $\overrightarrow{CG}(5\sqrt{3}, 5)$. Par suite, $\overrightarrow{CG} = 5\overrightarrow{CD}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires ou encore

les points C, D et G sont alignés.

d) $g - d = 4\sqrt{3} + 6i - 2i = 4\sqrt{3} + 4i = b - 0$ ou encore $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OB}$. Par suite

$$\boxed{\text{le quadrilatère } OBGD \text{ est un parallélogramme.}}$$

5) D'après la question 4)c), la droite (CG) est la droite (DG). Mais alors, d'après la question 4)d), la droite (CG) est parallèle à la droite (OB). Donc, l'angle $\widehat{ACG}$ est l'angle $\widehat{AOB}$ et l'angle $\widehat{AGC}$ est l'angle $\widehat{ABO}$ (angles correspondants). Mais d'après la question 2)b), le triangle OAB est équilatéral. On en déduit que le triangle AGC a trois angles égaux et donc que

$$\boxed{\text{le triangle } AGC \text{ est équilatéral.}}$$