France métropolitaine. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5-2t \\ y = 1+3t \\ z = 4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1) On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

a) La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b) La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

c) La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

2) On note $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

a) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.

b) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.

c) Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3) Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i| = |z-i|$.

a) $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.

b) $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.

c) $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4) On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Le triangle OBC est isocèle en O.

b) Les points O, B, C sont alignés.

c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

France métropolitaine. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1)	**réponse b)**
2)	**réponse b)**
3)	**réponse a)**
4)	**réponse c)**

Justification 1. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(3,2,1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(-2,3,0)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 3\times(-2)+2\times 3+1\times 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Soit $M(5-2t,1+3t,4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$3(5-2t)+2(1+3t)+(4)-6 = 0t+15 = 15\neq 0.$$

Aucun point de la droite $\mathscr{D}$ n'appartient au plan $\mathscr{P}$. Donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ mais n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

Remarque. La réponse c) ne pouvait pas être exacte car alors les réponses b) et c) auraient été exactes ce qui est exclu.

Justification 2. Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}=(2,-1,2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. On sait alors que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M(5-2t,1+3t,4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$ et $M'(3+2t',1-t',1+2t')$, $t'\in\mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}'$.

$$M=M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}5-2t=3+2t'\\1+3t=1-t'\\4=1+2t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=\dfrac{3}{2}\\5-2t=3+2\times\dfrac{3}{2}\\1+3t=1-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=\dfrac{3}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=\dfrac{3}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. .$$

Pour $t=-\dfrac{1}{2}$ (ou $t'=\dfrac{3}{2}$), on obtient le point A de coordonnées $\left(6,-\dfrac{1}{2},4\right)$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en A et donc la bonne réponse est la réponse b).

Justification 3. Soit M un point du plan, d'affixe z. Posons $z=x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|z+i|=|z-i| &\Leftrightarrow |x+i(y+1)|^2=|x+i(y-1)|^2 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2\\ &\Leftrightarrow y^2+2y+1=y^2-2y+1 \Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0.\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses et donc la bonne réponse est la réponse a).

Justification 4. $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \left|\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \sqrt{2}$. D'autre part, $\left|\dfrac{c}{b}\right| = \dfrac{|c|}{|b|} = \dfrac{OC}{OB}$. Donc $OC=\sqrt{2}OB$. Puisque $B\neq O$, le triangle OBC n'est pas isocèle en O.

$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = (1+i)$ puis $c=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}c=(1+i)b$. Mais alors

$$BC=|c-b|=|(1+i)b-b|=|ib|=|i|\times|b|=1\times OB=0B.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle en B. Enfin,

$$BC^2+BO^2=BO^2+BO^2=2BO^2=\left(\sqrt{2}B0\right)^2=OC^2.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle et rectangle en B. La bonne réponse est la réponse c).