Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $C(0\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$ est :

a) $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

c) $\left\{\begin{array}{l} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

Question 2 Soit $\mathscr{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas sécants
b) La droite $\mathscr{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
c) La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $E\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$.
d) La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $F\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3

a) L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b) Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c) Le plan $\mathscr{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d) Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4 Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a) $22,2\,°$ **b)** $0,4\,°$ **c)** $67,8\,°$ **d)** $1,2\,°$

Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Question 1	**réponse c)**
Question 2	**réponse c)**
Question 3	**réponse d)**
Question 4	**réponse a)**

Explication 1. Les droites des propositions a) et d) sont dirigées par des vecteurs non colinéaires à $\overrightarrow{u}$. Donc les réponses a) et d) sont fausses. Par contre, les droites des propositions b) et c) sont dirigées par des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

Quand $t = -1$ dans la droite de la proposition c), on obtient le point A. Donc la bonne réponse c). Vérifions explicitement que la réponse b) est fausse. Si le point A appartient à la droite de la proposition b), il existe un réel t tel que $-1 + 2t = 1$ ou encore $t = 1$ et aussi $1 - t = -1$ et donc $t = 2$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de la proposition b).

Explication 2. La droite $\mathscr{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}_2(1, -1, -2)$. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{n} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc la droite $\mathscr{D}_2$ est sécante au plan $\mathscr{P}$. La réponse a) est fausse.

Soit $M(1 + t, -3 - t, 2 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}_2$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + t) + (-3 - t) - (2 - 2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}.$$

Quand $t = -\frac{2}{3}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. On sait que la proposition a) est fausse.

On rappelle qu'un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$. D'autre part, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(0, 2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, 4, 2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan. Ensuite,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 1 \times 4 + (-1) \times 2 = -2 + 4 - 2 = 0$$

.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. La proposition c) est donc fausse.

$2x_A + y_A - z_A + 5 = 2 - 1 + 1 + 5 = 7 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$. On en déduit que la proposition b) est fausse et la proposition d) est vraie.

Explication 4. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$.
Ensuite, $AB = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$. Donc

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{12}{2\sqrt{2} \times \sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{42}}.$$

La calculatrice fournit une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$: $\widehat{BAC} = 22,2\,°$ arrondi au dixième de degré. La bonne réponse est la réponse a).