

EXERCICE 3

- 1) D
- 2) D
- 3) B
- 4) B

Explications.

1) Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur $\vec{n}(1, 1, -3)$. La droite de la proposition A est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 0)$ qui n'est pas colinéaire à \vec{n} et la droite de la proposition C est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 3)$ qui n'est pas colinéaire à \vec{n} . Les réponses A et C sont donc mauvaises.

Il reste les propositions B et D. Dans chacun de ces deux cas, la droite considérée est dirigée par \vec{n} et est donc parallèle à la droite \mathcal{D} . Dans D, $t = -1$ fournit $x = 1$, $y = -2$ et $z = 0$ ce qui montre que le point S appartient à la droite de la proposition D. Puisqu'il n'y a qu'une seule bonne réponse, c'est la D.

Vérifions néanmoins que la proposition B est mauvaise. L'égalité $1 = 2 + t$ fournit $t = -1$ et l'égalité $0 = 1 - 3t$ fournit $t = \frac{1}{3}$. Le réel t ne pouvant être simultanément égal à -1 et à $\frac{1}{3}$, le point S n'appartient pas à la droite de la proposition B, proposition qui est donc fautive.

2) Puisque H est sur la droite \mathcal{D} , les coordonnées de H sont de la forme $(2 + t, -1 + t, -3 - 3t)$ où t est un réel.

$$H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (2 + t) + (-1 + t) - 3(-3 - 3t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 11t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{11}.$$

Mais alors les coordonnées de H sont $(2 - \frac{14}{11}, -1 - \frac{14}{11}, -3 + 3 \times \frac{14}{11})$ ou encore $(\frac{8}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{9}{11})$.

3) La distance de S au plan \mathcal{P} vaut $\frac{|1 + (-2) - 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}}$ ou encore $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

4) La distance d de S au plan \mathcal{P} vaut $\frac{3}{\sqrt{11}}$ et le rayon R de \mathcal{S} vaut 3. Par suite $d < R$ et donc l'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} est un cercle \mathcal{C} de rayon strictement positif noté r .

D'après le théorème de PYTHAGORE, $R^2 = d^2 + r^2$ et donc

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse, la bonne réponse est nécessairement la réponse B. Notons tout de même que le centre du cercle \mathcal{C} est la projection orthogonale du point S sur le plan \mathcal{P} c'est-à-dire le point H. La réponse B est donc effectivement la bonne réponse.