EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. La solution f définie de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) $f(x) = -2e^{-2x} + 3$.

Réponse (2) $f(x) = -2e^{2x} + 3$.

Réponse (3) $f(x) = -2e^{-2x} - 3$.

2. On considère un triangle ABC et on note I le point tel que :

$$2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) $\{(A\,;1)\,;(C\,;2)\}$.

Réponse (2) $\{(A\,;1)\,;(B\,;2)\,;(C\,;2)\}$.

Réponse (3) $\{(A\,;1)\,;(B\,;2)\,;(C\,;1)\}$.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(0; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x - 3y + 2z = 5$ et le point $A\,(2; 3; -1)$.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point :

Réponse (1) $H_1\,(3\,; -1\,; 4)$.

Réponse (2) $H_2\,(4\,; -3\,; -4)$.

Réponse (3) $H_3\,(3\,; 0\,; 1)$.

4. La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) $-\dfrac{\pi}{2}$.

Réponse (2) $\dfrac{\pi}{4}$.

Réponse (3) $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 4

1) Réponse (1)

2) Réponse (3)

3) Réponse (3)

4) Réponse (2)

Justifications.

1) Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.
Ici, $a = -2$ et $b = 6$ et donc les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$ ce qui élimine les réponses (2) et (3). De plus, la condition $f(0) = 1$ équivaut à $C + 3 = 1$ ou encore $C = -2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ ce qui confirme que la réponse (1) est exacte.

2) I est le barycentre du système $\{(B; 2); (C; 1)\}$. Le théorème du barycentre partiel permet d'affirmer que $\text{bar}\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\} = \text{bar}\{(A; 1); (I; 3)\}$. Ainsi, le barycentre du système $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$ est sur la droite (AI) et la bonne réponse est la réponse (3).

3) $x_{H_1} - 3y_{H_1} + 2z_{H_1} = 3 + 3 + 8 = 14 \neq 5$. Le point H_1 n'appartient pas à $\mathscr{P}$ et la réponse (1) est fausse.
$x_{H_2} - 3y_{H_2} + 2z_{H_2} = 4 + 9 - 8 = 5$ et $x_{H_3} - 3y_{H_3} + 2z_{H_3} = 3 + 2 = 5$. Les points H_2 et H_3 appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_2}$ a pour coordonnées $(2, -6, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ a pour coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point H_3.

4) La valeur moyenne considérée est $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$.
Puisque f est une fonction positive sur $[0, 1]$, I est un nombre positif et la réponse (1) est fausse. Ensuite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\dfrac{1}{1 + x^2} \leqslant 1$ et donc d'après l'inégalité de la moyenne, $I \leqslant \displaystyle\int_0^1 1\, dx \leqslant 1 \times (1 - 0) = 1$. Comme $\dfrac{\pi}{2} > 1$, la réponse (3) est fausse. La bonne réponse est donc nécessairement la réponse (2).

On ne sait calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ qu'au cours de la première année d'études supérieures.

