EXERCICE 4

1)	**Réponse (1)**
2)	**Réponse (3)**
3)	**Réponse (3)**
4)	**Réponse (2)**

Justifications.

1) Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.
Ici, $a = -2$ et $b = 6$ et donc les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$ ce qui élimine les réponses (2) et (3). De plus, la condition $f(0) = 1$ équivaut à $C + 3 = 1$ ou encore $C = -2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ ce qui confirme que la réponse (1) est exacte.

2) I est le barycentre du système $\{(B;2);(C;1)\}$. Le théorème du barycentre partiel permet d'affirmer que $\text{bar}\{(A;1);(B;2);(C;1)\} = \text{bar}\{(A;1);(I;3)\}$. Ainsi, le barycentre du système $\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$ est sur la droite (AI) et la bonne réponse est la réponse (3).

3) $x_{H_1} - 3y_{H_1} + 2z_{H_1} = 3 + 3 + 8 = 14 \neq 5$. Le point H_1 n'appartient pas à $\mathscr{P}$ et la réponse (1) est fausse.
$x_{H_2} - 3y_{H_2} + 2z_{H_2} = 4 + 9 - 8 = 5$ et $x_{H_3} - 3y_{H_3} + 2z_{H_3} = 3 + 2 = 5$. Les points H_2 et H_3 appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_2}$ a pour coordonnées $(2, -6, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ a pour coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point H_3.

4) La valeur moyenne considérée est $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
Puisque f est une fonction positive sur $[0, 1]$, I est un nombre positif et la réponse (1) est fausse. Ensuite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ et donc d'après l'inégalité de la moyenne, $I \leqslant \int_0^1 1\,dx \leqslant 1 \times (1 - 0) = 1$. Comme $\frac{\pi}{2} > 1$, la réponse (3) est fausse. La bonne réponse est donc nécessairement la réponse (2).

On ne sait calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ qu'au cours de la première année d'études supérieures.

