EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

- $\frac{21}{40}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}$
- $\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$

2) De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à:

- $\frac{3^3\times 7^2}{10^5}$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3$
- $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

3) De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1. Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à:

- $\frac{7}{60}$
- $\frac{14}{23}$
- $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4) On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda}-e^{-\lambda}$
- $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

EXERCICE 3

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{1)} & \dfrac{21}{40} \\
\textbf{2)} & \dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 \\
\textbf{3)} & \dfrac{14}{23} \\
\textbf{4)} & e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}
\end{array}
$$

Explications.

1) Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 10 est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120$$

Le nombre de tirages simultanés de 2 boules blanches et d'une boule noire parmi les 10 boules est

$$\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{7 \times 6}{2} \times 3 = 21 \times 3 = 63.$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

2) Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de cinq tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

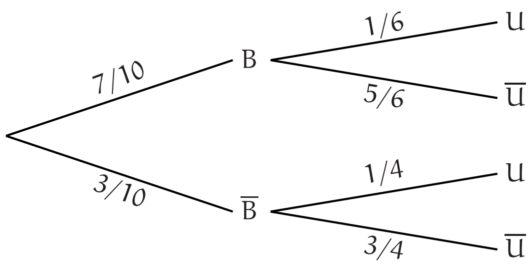
- 5 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{7}{10}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{3}{10}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{7}{10}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2.$$

3) Représentons la situation par un arbre. On note B l'événement « la boule tirée est blanche » et U l'événement « le joueur obtient le numéro 1 ».



La probabilité demandée est $p_U(B)$.

$$p_U(B) = \frac{p(U \cap B)}{p(U)} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(U \cap B) + p(U \cap \overline{B})} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(B) \times p_B(U) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(U)}$$

$$= \frac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{7}{6} + \dfrac{3}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{23}{12}} = \frac{7}{6} \times \frac{12}{23} = \frac{14}{23}.$$

4) On sait que $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis

$$p(1 \leqslant X \leqslant 3) = p(X \leqslant 3) - p(X \leqslant 1) = (1 - e^{-3\lambda}) - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.$$

