EXERCICE 3

1) $\dfrac{21}{40}$

2) $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3) $\dfrac{14}{23}$

4) $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$

Explications.

1) Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 10 est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120$$

Le nombre de tirages simultanés de 2 boules blanches et d'une boule noire parmi les 10 boules est

$$\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{7 \times 6}{2} \times 3 = 21 \times 3 = 63.$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

2) Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de cinq tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

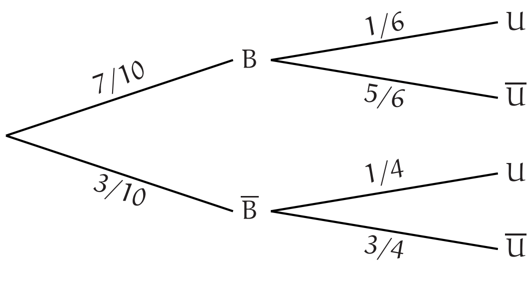
- 5 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{7}{10}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{3}{10}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{7}{10}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2.$$

3) Représentons la situation par un arbre. On note B l'événement « la boule tirée est blanche » et U l'événement « le joueur obtient le numéro 1 ».



La probabilité demandée est $p_U(B)$.

$$p_U(B) = \frac{p(U \cap B)}{p(U)} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(U \cap B) + p(U \cap \overline{B})} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(B) \times p_B(U) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(U)}$$

$$= \frac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{7}{6} + \dfrac{3}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{23}{12}} = \frac{7}{6} \times \frac{12}{23} = \frac{14}{23}.$$

4) On sait que $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis

$$p(1 \leqslant X \leqslant 3) = p(X \leqslant 3) - p(X \leqslant 1) = (1 - e^{-3\lambda}) - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.$$