EXERCICE 2 (5 points)

(Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1 On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \qquad b = 3i, \qquad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation
Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2 On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2i}{\sqrt{3}+i}\right) z$.

Affirmation
La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3 On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + i\right)^{2011}$.

Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Question 4 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètreλ, où λ est un nombre strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel t strictement positif, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$ s'exprime par $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Affirmation
Sachant que $X \geqslant 2$, la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2; 3]$ est égale à $1 - e^{-\lambda}$.

Question 5 Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sur les 10 tirages est supérieure ou égale à $0,9999$, est égale à 13.

EXERCICE 2

1.	**VRAI**
2.	**VRAI**
3.	**FAUX**
4.	**VRAI**
4.	**FAUX**

Justification 1.
• $AB = |b-a| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.
• $AC = |c-a| = \left|\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2} = \sqrt{3-\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}+1} = \sqrt{5}$.
• $BC = |c-b| = \left|\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} = \sqrt{3+\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}-\sqrt{3}+1} = \sqrt{5}$.

Donc $AB = AC = BC = \sqrt{5}$ et on en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

Justification 2. On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Or

$$\frac{2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.$$

Donc l'écriture complexe de f est $z' = e^{i\pi/3}z$ et par suite, f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Justification 3. $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{5i\pi/6}$. Ensuite,

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011} = \left(2e^{5i\pi/6}\right)^{2011} = 2^{2011}e^{2011\times5i\pi/6} = 2^{2011}e^{10055i\pi/6}.$$

Ensuite, $10055 = 837\times12+11$ puis $\dfrac{10055\pi}{6} = \dfrac{(837\times12+11)\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}+837\times2\pi$ et donc

$$e^{10055i\pi/6} = e^{\frac{11\pi}{6}i+837\times2i\pi} = e^{11i\pi/6}.$$

Par suite,

$$\mathrm{Re}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011} = \mathrm{Re}\left(2^{2011}e^{11i\pi/6}\right) = 2^{2011}\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2^{2011}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\neq0.$$

Le nombre $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011}$ n'est donc pas un imaginaire pur.

Justification 4.

$$\begin{aligned}p_{X\geqslant2}(2\leqslant X\leqslant3) &= \frac{p(2\leqslant X\leqslant3)}{p(X\geqslant2)} = \frac{p(X\leqslant3)-p(X<2)}{1-p(X<2)} = \frac{p(X\leqslant3)-p(X\leqslant2)}{1-p(X\leqslant2)}\\ &= \frac{(1-e^{-3\lambda})-(1-e^{-2\lambda})}{1-(1-e^{-2\lambda})} = \frac{e^{-2\lambda}-e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = 1-e^{(-3+2)\lambda}\\ &= 1-e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Donc la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2;3]$ sachant que $X\geqslant2$ est $1-e^{-\lambda}$.

Justification 5. Notons X le nombre de boules blanches obtenues en 10 tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes (car le tirage s'effectue avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{5}{n}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1-p = \dfrac{n-5}{n}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $p = \frac{5}{n}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche en 10 tirages est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{5}{n}\right)^0\left(\frac{n-5}{n}\right)^{10} = 1 - \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{10}.$$

Ensuite, $1 - \left(1 - \frac{5}{13}\right)^{10} = 0,992\ldots < 0,9999$ et donc la proposition 5 est fausse.

