EXERCICE 2

1. VRAI

2. VRAI

3. FAUX

4. VRAI

4. FAUX

Justification 1.

- $AB = |b-a| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.
- $AC = |c-a| = \left|\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2} = \sqrt{3-\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}+1} = \sqrt{5}$.
- $BC = |c-b| = \left|\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} = \sqrt{3+\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}-\sqrt{3}+1} = \sqrt{5}$.

Donc $AB = AC = BC = \sqrt{5}$ et on en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

Justification 2. On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Or

$$\frac{2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.$$

Donc l'écriture complexe de f est $z' = e^{i\pi/3}z$ et par suite, f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Justification 3. $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{5i\pi/6}$. Ensuite,

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011} = \left(2e^{5i\pi/6}\right)^{2011} = 2^{2011}e^{2011\times 5i\pi/6} = 2^{2011}e^{10055i\pi/6}.$$

Ensuite, $10055 = 837\times 12+11$ puis $\dfrac{10055\pi}{6} = \dfrac{(837\times 12+11)\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}+837\times 2\pi$ et donc

$$e^{10055i\pi/6} = e^{\frac{11\pi}{6}i+837\times 2i\pi} = e^{11i\pi/6}.$$

Par suite,

$$\text{Re}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011} = \text{Re}\left(2^{2011}e^{11i\pi/6}\right) = 2^{2011}\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2^{2011}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Le nombre $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011}$ n'est donc pas un imaginaire pur.

Justification 4.

$$\begin{aligned}
p_{X\geqslant 2}(2\leqslant X\leqslant 3) &= \frac{p(2\leqslant X\leqslant 3)}{p(X\geqslant 2)} = \frac{p(X\leqslant 3)-p(X<2)}{1-p(X<2)} = \frac{p(X\leqslant 3)-p(X\leqslant 2)}{1-p(X\leqslant 2)}\\
&= \frac{(1-e^{-3\lambda})-(1-e^{-2\lambda})}{1-(1-e^{-2\lambda})} = \frac{e^{-2\lambda}-e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = 1-e^{(-3+2)\lambda}\\
&= 1-e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Donc la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2;3]$ sachant que $X\geqslant 2$ est $1-e^{-\lambda}$.

Justification 5. Notons X le nombre de boules blanches obtenues en 10 tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes (car le tirage s'effectue avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{5}{n}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1-p = \dfrac{n-5}{n}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $p = \dfrac{5}{n}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche en 10 tirages est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{5}{n}\right)^0\left(\frac{n-5}{n}\right)^{10} = 1 - \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{10}.$$

Ensuite, $1 - \left(1 - \dfrac{5}{13}\right)^{10} = 0,992\ldots < 0,9999$ et donc la proposition 5 est fausse.

