EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = \text{i}$, $z_C = -1$, $z_D = -\text{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z_E = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$.

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\text{i}| = |z-1|$ est :

- la médiatrice du segment $[BC]$,
- le milieu du segment $[BC]$,
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment $[AD]$.

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\text{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C,
- la médiatrice du segment $[AB]$.

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D.

EXERCICE 2

1. **Réponse 2**

2. **Réponses 1 et 4**

3. **Réponse 2**

4. **Réponse 3**

Explication 1.

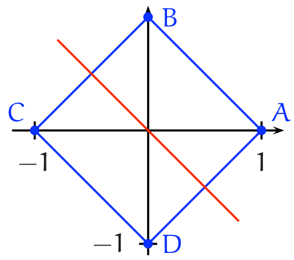
$$z_E = z_A + e^{i\pi/3}(z_D - z_A) = 1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1) = 1 - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i).$$

La bonne réponse est la deuxième.

Explication 2. (Erreur d'énoncé car deux des réponses sont exactes).
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow MD = MA \Leftrightarrow M \in \text{med}[AD].$$

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AD]. Malheureusement, la médiatrice du segment [AD] est aussi la médiatrice du segment [BC] et donc les réponses 1 et 4 sont exactes (et les réponses 2 et 3 sont fausses).



Explication 3. On note (E) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur.

Le point D est élément de (E) car $\dfrac{z_D+i}{z_D+1} = \dfrac{-i+i}{-i+1} = 0$ qui est bien un imaginaire pur. Le point C n'est pas un élément de (E) car $z_C + 1 = 0$ et donc $\dfrac{z_C+i}{z_C+1}$ n'existe pas.

Soit M un point du plan distinct de C et D dont l'affixe est notée z.

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_D}{z-z_C} \text{ imaginaire pur}\\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre [CD] privé des points C et D.}
\end{aligned}$$

En récupérant le point D, on a montré que (E) est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 4. On note (E) l'ensemble considéré. Le point B d'affixe i n'appartient pas à (E) car 0 n'a pas d'argument.
Soit M un point du plan d'affixe $z \neq i$.

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow M \in]BD).
\end{aligned}$$

Donc (E) est la demi-droite d'origine B passant par D et privée du point B. La bonne réponse est la troisième.