EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.
On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1,\,2,-4)$ et $(-3,\,4,1)$.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -8+2t \\ y &=& 7-t \\ z &=& 6+t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$
   - Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécants.
   - Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point en commun.
   - La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   - Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $x+4y-3z+4=0$.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et distincts.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.
   - Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :
   - une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1,\,3,-\dfrac{1}{2}\right)$,
   - une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=5$ est :
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5,\,5,\,\dfrac{7}{2}\right)$,
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(5,\,-5,\,-\dfrac{7}{2}\right)$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Réunion

EXERCICE 1

1. Réponse 2

2. Réponse 4

3. Réponse 3

4. Réponse 1

Explication 1. Soit $M(-8+2t, 7-t, 6+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$2x_M + 3y_M - z_M + 4 = 2(-8+2t) + 3(7-t) - (6+t) + 4 = 3.$$

Donc, pour tout point M de $\mathscr{D}$, $2x_M + 3y_M - z_M + 4 \neq 0$ et le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point commun. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 2. Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,3,-1)$ et le plan $\mathscr{P}'$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(1,4,-3)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite (D). Un vecteur directeur de (D) doit être orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

$$(-1) \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-1) = -2 + 3 - 2 = -1 \neq 0.$$

Donc le vecteur de coordonnées $(-1, 1, 2)$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et par suite n'est pas un vecteur directeur de (D). La bonne réponse est donc nécessairement la dernière. Vérifions le.

$$(-1) \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times (-1) = -2 + 3 - 1 = 0 \text{ et } (-1) \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times (-3) = -1 + 4 - 3 = 0.$$

Le vecteur de coordonnées $(-1, 1, 1)$ est effectivement orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ et donc est effectivement un vecteur directeur de (D). La bonne réponse est la réponse 4.

Explication 3. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
MA = MB &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 1 + 4 + 16 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 9 + 16 + 1 \\
&\Leftrightarrow -8x + 4y + 10z - 5 = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse 3.

Explication 4. Soit $G = \text{bar}\{A(1), B(-3)\}$. Soit M un point de l'espace.

$$\left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|(1-3)\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \Leftrightarrow 2MG = 5 \Leftrightarrow MG = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble considéré est donc la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{2}$. De plus,

- $x_G = \dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} = \dfrac{1 - 3 \times (-3)}{-2} = -5$,
- $y_G = \dfrac{y_A - 3y_B}{1-3} = \dfrac{2 - 3 \times (4)}{-2} = 5$,
- $z_G = \dfrac{z_A - 3z_B}{1-3} = \dfrac{-4 - 3 \times 1}{-2} = \dfrac{7}{2}$.

Donc les coordonnées du point G sont $\left(-5, 5, \dfrac{7}{2}\right)$. La bonne réponse est la réponse 1.

