# France métropolitaine/Réunion septembre 2015. Enseignement de spécialité

**EXERCICE 3 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

**Partie A**

On considère l'équation $(E)$ : $15x - 26k = m$ où $x$ et $k$ désignent des nombres entiers relatifs et $m$ est un paramètre entier non nul.

**1)** Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u, v)$ tel que

$$15u - 26v = 1.$$

Trouver un tel couple.

**2)** En déduire une solution particulière $(x_0, k_0)$ de l'équation $(E)$.

**3)** Montrer que $(x, k)$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si

$$15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0.$$

**4)** Montrer que les solutions de l'équation $(E)$ sont exactement les couples $(x, k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{array}\right. \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

**Partie B**

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un système de codage :

- A chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier $x$ correspondant,
- on associe ensuite à $x$ l'entier $y$ qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par $26$,
- on associe à $y$ la lettre correspondante.

**1)** Coder le mot **MATHS**.

**2)** Soit $x$ le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et $y$ le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par $26$.

**a)** Montrer alors qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $15x - 26k = y - 7$.

**b)** En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.

**c)** En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

**3)** Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.
Décoder le mot WHL.

**4)** Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

 