France métropolitaine 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. $15x - 12y = 3(5x - 4y)$ où $5x - 4y$ est un entier relatif. Donc, l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b) Soient (x, y) un couple d'entiers relatifs puis M le point de coordonnées (x, y).

$$\begin{aligned} M \in \Delta_1 &\Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{15x-8}{12} \Leftrightarrow 12y = 15x - 8 \\ &\Leftrightarrow 15x - 12y = 8. \end{aligned}$$

Maintenant, $15x - 12y$ est un entier divisible par 3 et 8 n'est pas un entier divisible par 3. Donc, l'entier $15x - 12y$ n'est pas égal à l'entier 8.

On a montré qu'il n'existe pas de couple (x, y) d'entiers relatifs tel que $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$ ou encore, il n'existe pas de point de Δ_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Généralisation.

2) a) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Δ à coordonnées entières.

$$\begin{aligned} M_0 \in \Delta &\Leftrightarrow y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q} \Leftrightarrow y_0 = \frac{mqx_0 - np}{nq} \Leftrightarrow nqy_0 = mqx_0 - np \\ &\Leftrightarrow q(mx_0 - ny_0) = np. \end{aligned}$$

b) Ainsi, si il existe un point de Δ dont les coordonnées (x_0, y_0) sont des nombres entiers relatifs, alors $q(mx_0 - ny_0) = np$. On en déduit que l'entier q divise l'entier np. Puisque d'autre part, les entiers q et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier q divise l'entier n.

3) a) Les entiers n et m sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u' et v' tels que $nu' + mv' = 1$ ou encore tel que $qru' + mv' = 1$. Si on pose $u = u'$ et $v = -v'$, u et v sont deux entiers relatifs tels que $nu - mv = 1$ ou encore $qru - mv = 1$.

b) D'après la question 2)a), $M(x_0, y_0)$ est un point de Δ à coordonnées entières si et seulement si $q(mx_0 - ny_0) = np$. Puisque q n'est pas nul,

$$q(mx_0 - ny_0) = np \Leftrightarrow q(mx_0 - ny_0) = qrp \Leftrightarrow mx_0 - ny_0 = rp.$$

Mais si on multiplie les deux membres de l'égalité $nu - mv = 1$ par rp, on obtient

$$rp = m(-vrp) - n(-urp).$$

Donc, le couple $(x_0, y_0) = (-vrp, -urp)$ est solution du problème.

En résumé, il existe sur Δ un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs si et seulement si q divise n.

4) Ici, les fractions sont bien sous forme irréductible puis $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$. Puisque 4 divise 8, Δ possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5) a) Si Q divise N, que l'algorithme affiche un couple $\left(X, \frac{M}{N}N + \frac{p}{q}\right)$ ou un couple $\left(-X, -\frac{M}{N}X + \frac{P}{Q}\right)$, il s'agit toujours d'un couple d'entiers relatifs qui sont les coordonnées d'un point de Δ. Dans un cas, l'abscisse du point est positive et dans l'autre l'abscisse du point est négative.
Puisque Q divise N, il existe au moins un point à coordonnées entières sur Δ. Celui-ci sera atteint en un temps fini (X prend la valeur $X + 1$) et donc l'algorithme se termine.

Si Q ne divise pas N, l'algorithme se termine immédiatement et en particulier se termine.

On a montré que, dans tous les cas, l'algorithme se termine.

b) Quand Q divise N, l'algorithme affiche le point de Δ à coordonnées entières dont la valeur absolue de l'abscisse est minimum et si Q ne divise pas N, l'algorithme affiche « Pas de solution ». De manière générale, l'algorithme teste si la droite est rationnelle ou pas.

